

Théorèmes d'interversion

Kylian PRIGENT

3 décembre 2024

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré

I LIMITE ET INTÉGRALE

Theorème 1 (*Convergence uniforme sur un segment*)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle **borné** I et qui **converge uniformément** sur I vers une fonction f . Alors f est continue sur I et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

Theorème 2 (*Convergence monotone*)

Soit $(f_n)_n$ une suite **croissante** de fonctions **mesurables positives** sur E . On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int f d\mu \quad \text{avec } f \text{ la limite de } (f_n)$$

Corollaire 1

Soit (f_n) une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n d\mu = \int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu$$

Theorème 3 (*Fatou*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **mesurables** sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$. On a :

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Theorème 4 (*Convergence dominée*)

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions **mesurables** de E et f une fonction mesurable de E dans \mathbb{C} telle que :

- (**convergence**) μ -presque partout f_n converge vers f ;
- (**domination**) il existe $g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ telle que μ -presque partout $|f_n| \leq g$.

Alors : La fonction f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

II RÉGULARITÉ ET INTÉGRALES

Theorem 5 (Continuité sous l'intégrale)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de $I \times E$ dans \mathbb{C} . On suppose :

- (**mesurabilité**) pour tout $t \in I$ la fonction $f(t, \cdot)$ est mesurable ;
- (**continuité**) pour μ -presque tout $x \in E$ la fonction $f(\cdot, x)$ est continue sur I ;
- (**domination**) il existe $g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ telle pour tous $t \in I$ et μ -presque tout $x \in E$ on ait $|f(t, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction définie par :

$$F : t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$$

est bien définie pour tout $t \in I$ et est continue sur I .

Theorem 6 (Dérivabilité sous l'intégrale)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de $I \times E$ dans \mathbb{C} . On suppose :

- (**existence de F**) pour tout $t \in I$ la fonction $f(t, \cdot)$ est intégrable ;
- (**dérivabilité**) pour μ -presque tout $x \in E$ la fonction $f(\cdot, x)$ est dérivable sur I de dérivée notée $\frac{\partial f}{\partial t}$;
- (**domination**) il existe $g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ telle pour tous $t \in I$ et μ -presque tout $x \in E$ on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$.

Alors la fonction définie par :

$$F : t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$$

est dérivable sur I , et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$$

Corollaire 2

Si on ne prend plus I un intervalle de \mathbb{R} mais Y une partie de \mathbb{R}^d localement compacte, alors il faut modifier la deuxième et la troisième hypothèses : elles doivent être vraies pour toutes les $\frac{\partial f}{\partial y_j}$

Corollaire 3 (Classe \mathcal{C}^k sous l'intégrale)

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de $I \times E$ dans \mathbb{C} . On suppose :

- (**existence de F**) pour tout $t \in I$ la fonction $f(t, \cdot)$ est intégrable ;
- (**classe \mathcal{C}^k**) pour μ -presque tout $x \in E$ la fonction $f(\cdot, x)$ est de classe \mathcal{C}^k sur I de dérivée notée $\frac{\partial f}{\partial t}$;
- (**domination**) il existe $g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ telle pour tous $t \in I$ et μ -presque tout $x \in E$ on ait $\left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t, x) \right| \leq g(x)$.

Alors la fonction définie par :

$$F : t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$$

est de classe \mathcal{C}^k sur I , et pour tout $t \in I$:

$$F^{(k)}(t) = \int \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t, x) d\mu(x)$$

Theorème 7 (Holomorphie sous l'intégrale)

Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Soit $f : (z, x) \mapsto f(z, x)$ une fonction de $U \times E$ dans \mathbb{C} . On suppose :

- (**mesurabilité**) pour tout $t \in I$ la fonction $f(t, \cdot)$ est mesurable;
- (**holomorphie**) pour μ -presque tout $x \in E$ la fonction $f(\cdot, x)$ est holomorphe sur U ;
- (**domination**) il existe $g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ telle pour tous $z \in U$ et μ -presque tout $x \in E$ on ait $|f(z, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction définie par :

$$F : z \mapsto \int f(z, x) d\mu(x)$$

est holomorphe sur U , et pour tout $z \in U$:

$$F^{(n)}(z) = \int \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x)$$

III INTÉGRALE ET INTÉGRALE

Soit (F, \mathcal{B}, ν) un espace mesuré

Theorème 8 (Fubini-Tonelli)

Pour toute fonction **mesurable positive** f sur $E \times F$,

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \left(\int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Theorème 9 (Fubini-Lebesgue)

Pour toute fonction **mesurable** f sur $E \times F$ telle que

$$\text{(intégrabilité)} \quad \int_{E \times F} |f(x, y)| d(\mu \otimes \nu)(x, y) < \infty$$

On a :

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \left(\int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

IV CHANGEMENT DE VARIABLE

Theorème 10

Soient U et D des ouverts de \mathbb{R}^d . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et soit $\varphi : U \rightarrow D$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

1. Si f est positive, alors

$$\int_D f(x) dx = \int_U f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)| du$$

et

$$\int_U f(\varphi(u)) du = \int_D f(x) |J_{\varphi^{-1}}(u)| dx$$

2. Si f est intégrable sur D , la première égalité précédente a un sens (autrement dit, $u \mapsto f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)|$ est intégrable sur U) et est vraie. Si $f \circ \varphi$ est intégrable sur U , alors il en est de même de la deuxième.

V INTERVERSION SÉRIE ET INTÉGRALE

Theorème 11 (Convergence uniforme sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle **borné** I telle que la série $\sum_n f_n$ **converge uniformément** sur I .

Alors la série numérique $\sum_n \left(\int_I f_n \right)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)$$

Theorème 12 (Intégration terme à terme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{C} . Supposons que :

(i) chaque f_n est **intégrable** sur I ;

(ii) $\sum_n f_n$ **converge simplement** vers une fonction continue par morceaux sur I

(iii) la série $\sum_n \int_I |f_n(t)| dt$ **converge**

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

V.A Double limite

Theorème 13 (Double limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions qui **converge uniformément** vers f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une **limite** l_n en a . Alors :

1. (l_n) converge vers un élément l
2. f admet l comme limite en a .

i.e. :

$$\lim_a \left(\lim_n f_n \right) = \lim_n \left(\lim_a f_n \right)$$

Corollaire 4 (Double limite (séries))

Soit (f_n) une suite de fonctions on suppose que $\sum f_n$ **converge uniformément** de somme S et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une **limite** l_n en a . Alors :

1. $\sum l_n$ converge
2. S admet $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ comme limite en a .

i.e. :

$$\lim_a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_a f_n \right)$$